УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА

Мусаев В.К.

МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости. Приводится изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Приводится некоторая информация о численном моделировании упругих волн напряжений в упругой полуплоскости при сосредоточенном вертикальном воздействии в виде функции Хевисайда. Показано изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости.

Ключевые слова: нестационарные волны, численный метод, перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, задача Коши, методика, алгоритм, однородный алгоритм, комплекс программ, продольная волна, поперечная волна, коническая волна, волна Релея, поверхностная волна, задача Лэмба, сосредоточенное вертикальное воздействие, функция в виде Хевисайда, упругая полуплоскость, напряжения на свободной поверхности

MATHEMATICAL MODELING OF SURFACE WAVES STRESSES IN THE LAMB PROBLEM WHEN EXPOSED IN THE FORM OF HEAVISIDE FUNCTIONS

Musayev V.K.

MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information on the numerical modeling of longitudinal, transverse and surface waves on the free surface of an elastic half-plane. Given the change in elastic contour stresses on the free surface of the half plane. For the solution of two-dimensional non-stationary dynamical problems of the mathematical theory of elasticity with initial and boundary conditions using the finite element method in movements. The problem is solved by a method of capturing, without isolation gaps. Applied homogeneous algorithm. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions has led to the linear Cauchy problem. Provides a bit of information on numerical simulation of elastic stress waves in elastic half-plane when focused vertical exposure in the form of Heaviside functions. Shows the variation of elastic contour stresses on the free surface of the half plane.

Keywords: transient waves, numerical method, displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, elasticity theory, boundary value problem, the problem with the initial conditions, the Cauchy problem, method, algorithm, homogeneous algorithm, a set of programs, longitudinal wave, transverse wave, conical wave, Rayleigh wave, surface wave, lamb problem, centered vertical impact, the function in the form of Heaviside, elastic half-plane, the stresses on the free surface

Метод решения двумерной плоской нестационарной динамической задачи теории упругости

В работах [1–10] приведена информация о применении вычислительной механики для моделирования волн напряжений в твердых деформируемых телах с помощью разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Динамическую задачу теории упругости решаем с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R},\ \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,\ \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где $\bar{H}$ – матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Для интегрирования уравнения движения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \qquad (2)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t\overline{H}^{-1}(-\overline{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (3)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Система уравнений (1) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы.

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k\frac{\min \Delta l_i}{C_p}\ (i = 1, 2, 3, ..., r), \qquad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1, 3–6].

Решение задачи о сосредоточенном вертикальном упругом воздействии в виде функции Хевисайда

В упругой полуплоскости от сосредоточенного воздействия распространяются продольные, поперечные, рэлеевские и конические волны. Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной волны в виде функции Хевисайда (рис. 2) перпендикулярной свободной поверхности упругой полуплоскости (рис. 1). В точке B перпендикулярно свободной поверхности ABC приложено упругое нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется 0 до P, а при $n \ge 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа).

Граничные условия для контура CDEA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура CDEA не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 500$. Контур ABC свободен от нагрузок, кроме точки B, где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1{,}393\times10^{-6}$ с; $E = 3{,}15\times10^4$ МПа; $v = 0{,}2$; $\rho = 0{,}255\times10^4$ кг/м^3; $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 48032004 неизвестных. На рис. 3–8 показано изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_к$ ($\overline{\sigma}_к = \sigma_к / |\sigma_0|$) во времени n в точках A1–A6 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости.

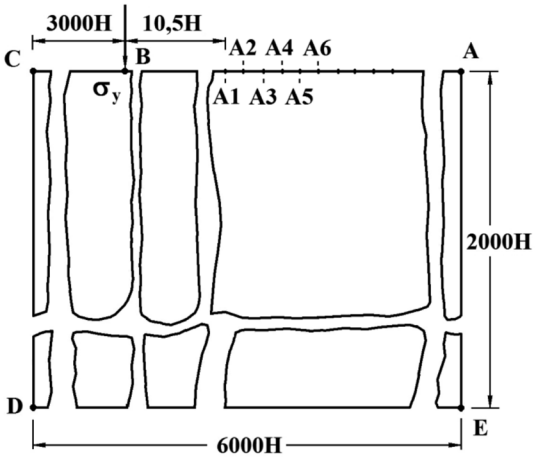

Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной волны в виде функции Хевисайда на свободной поверхности упругой полуплоскости

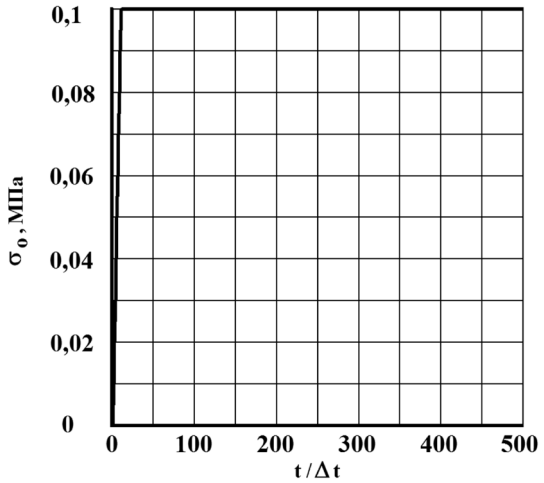

Рис. 2. Воздействие в виде функции Хевисайда

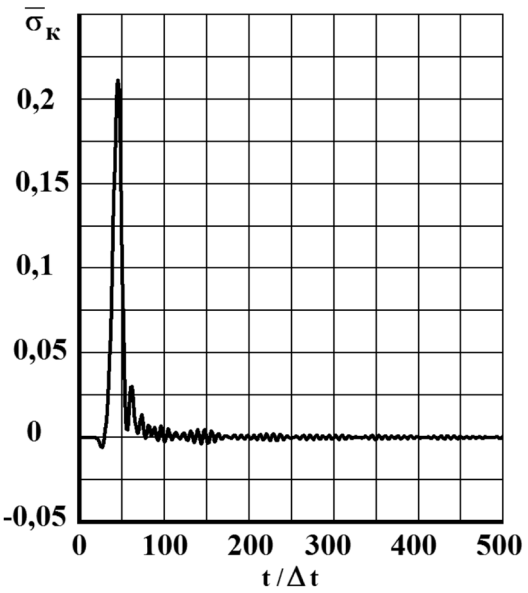

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A1

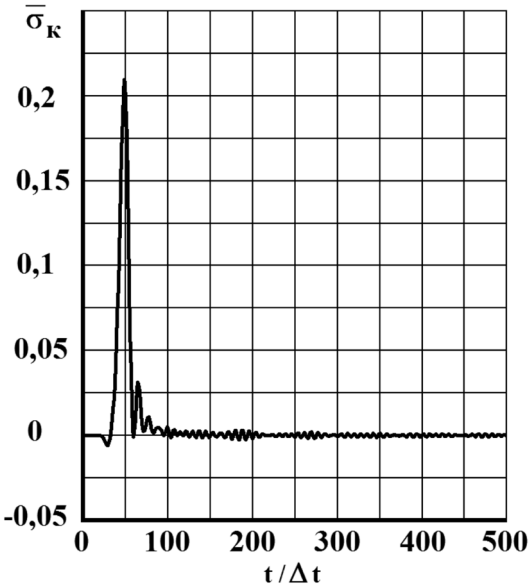

Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A2

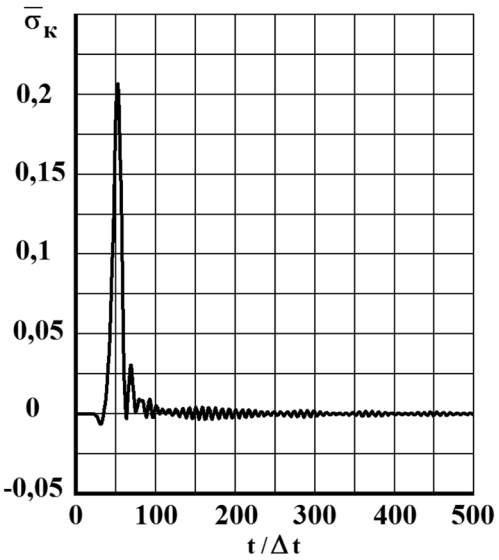

Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A3

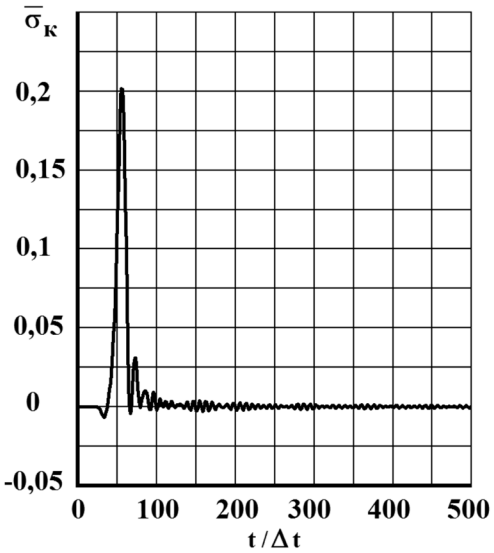

Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A4

Выводы

Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при воздействии вертикального сосредоточенного воздействия в виде функции Хевисайда на поверхности упругой полуплоскости.

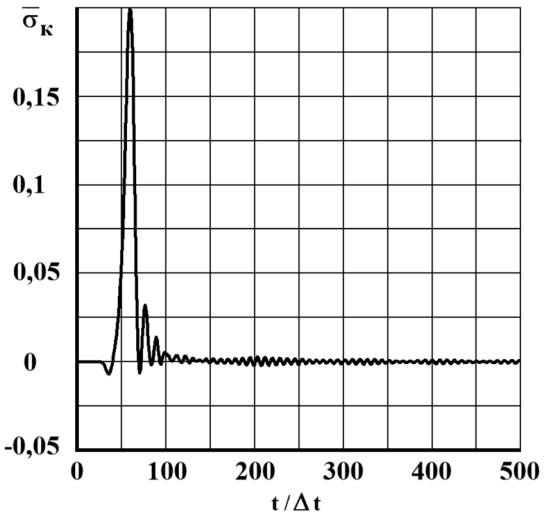

Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке А5

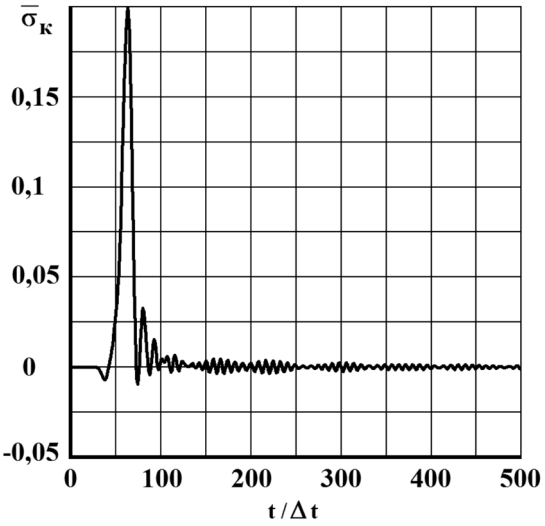

Рис. 8. Изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке А6

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

2. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

3. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

5. Мусаев В.К. Вычислительный эксперимент в задачах моделирования нестационарных волн напряжений в областях сложной формы // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 138–149.

6. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

8. Мусаев В.К. Моделирование безопасности по несущей способности дымовых труб с основанием при взрыве атомной бомбы в Нагасаки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 12. – С. 198–203.

9. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–30.

10. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015, № 2 (часть 2). – С. 220–223.