ПАРАДОКСАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

^{1,2}Сенницкий В.Л.¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: sennitskii@yandex.ru

Представлен краткий обзор исследований в актуальной научной области – совместной динамике жидкостей и контактирующих с ними твердых и газовых тел. Исследования в данной области направлены прежде всего на получение результатов, характеризующихся как фундаментальной, так и прикладной значимостью, на обнаружение и корректное математическое описание новых гидромеханических эффектов, явлений. Имеющиеся и ожидаемые результаты, в частности, могут быть использованы при разработке новых подходов к изучению научных и технических проблем, касающихся создания новых и улучшенных материалов, перспективных лекарственных форм, при решении проблем, связанных с процессами космической технологии, биотехнологии, тонкой химической технологии. Изложение акцентировано главным образом на неординарных результатах, гидромеханических эффектах. Рассмотрена задача о движении идеальной жидкости, вызываемом симметричными, периодическими по времени воздействиями. Обнаружен новый гидромеханический эффект, состоящий в том, что жидкость ведет себя парадоксальным образом: на фоне колебаний совершает однонаправленное стационарное движение.

Ключевые слова: жидкость, включение, стенка, колебания, парадоксальное движение, самодвижение, смерч (торнадо), термокапиллярная конвекция, разрешенные и запрещенные состояния

A PARADOXICAL LIQUID MOTION

^{1,2}Sennitskiy V.L.¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk;²Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: sennitskii@yandex.ru

A brief review of investigations is presented in an actual scientific field – joint dynamics of liquids and being in contact with them solid and gas bodies. First of all the investigations in this field are directed to obtaining results characterized by both a fundamental and an applied significance, to the discovery and a correct mathematical description of new hydro-mechanical effects and phenomena. Having place and expected results in particular may be used under elaborating of new approaches the study of scientific and technical problems which concern the creation of new and improved materials, perspective medicine forms, under solving the problems connected with the processes of space technology, bio-technology, delicate chemistry technology. In the main the content accents not ordinary results and hydro-mechanical effects. It is considered the problem on the motion of an ideal liquid caused by periodical on time symmetrical influences. The new hydro-mechanical effect is revealed consisting in that the liquid behaves paradoxically: on a background of oscillations the liquid fulfils its unidirectional stationary motion.

Keywords: liquid, inclusion, wall, oscillations, paradoxical motion, self-motion, whirlwind (tornado), thermo-capillary convection, permitted and forbidden states

Результаты ряда теоретических и экспериментальных исследований [1–17] обусловили заметный прогресс в выявлении и понимании особенностей динамики гидромеханических систем, закономерностей силового взаимодействия и совместного движения жидкостей и контактирующих с ними твердых и газовых тел (стенок, включений) в различных гидромеханических условиях. Данная научная область неизменно актуальна. Исследования осуществляются на основе теоретических задач в точных постановках и направленных экспериментов с определением факторов, принципиальным образом влияющих на наблюдаемые результаты. К настоящему времени, в частности, является установленным, что гидромеханические системы могут проявлять заданные свойства, демонстрировать необычное и даже парадоксальное поведение; обнаружены новые гидромеханические эффекты.

Область исследований, теоретические и экспериментальные результаты

В работе [1] рассмотрена следующая задача, постановка и изучение которой в значительной мере предопределили содержание дальнейших исследований. В идеальной жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью твердой стенки, находится твердое тело (круговой цилиндр). В начальный момент времени стенка, жидкость и тело неподвижны. В последующие моменты времени стенка, вибратор совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль оси, нормальной к ее границе. Требуется определить движение тела, включения. Реализовано приближение малых значительных отношения радиуса тела к расстоянию между телом и стенкой. Доказано, что для $\rho_v \neq \rho_{ж}$ (ρ_v , $\rho_{ж}$ – плотности соответственно включения и жидкости) на каждую часть единичной длины включения со стороны

жидкости действует направленная к стенке сила, модуль которой неограниченно возрастает с ростом характерной скорости стенки. Таким образом, включение притягивается к стенке, и это притяжение может быть достаточным для того, чтобы скомпенсировать или даже превзойти иные возможные силовые воздействия на включение. Данный результат свидетельствует о наличии следующих эффектов необычного, парадоксального движения твердого тела в колеблющейся (вибрирующей) жидкости. В присутствии силы тяжести (при ускорении свободного падения, отличном от нуля: $g \neq 0$) – на фоне колебаний – тело, более плотное, чем жидкость, находясь над стенкой, тонет быстрее; находясь под стенкой, тонет медленнее, всплывает вместо того, чтобы тонуть, не тонет и не всплывает – «левитирует»; тело, менее плотное, чем жидкость, находясь под стенкой, всплывает быстрее; находясь над стенкой, всплывает медленнее, тонет вместо того, чтобы всплывать, не всплывает и не тонет – «левитирует». Если сила тяжести отсутствует, $g = 0$, и $\rho_v \neq \rho_{ж}$, то и при $\rho_v > \rho_{ж}$ и при $\rho_v < \rho_{ж}$, включение (на фоне колебаний) движется к стенке, к вибратору.

Работа [1] по существу явилась истоком актуального научного направления – изучения динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях (см. в связи с этим также [18–20]). Данное направление, в частности, непосредственно связано с проблемой выявления новых возможностей управления гидромеханическими системами.

Исследование, отраженное в [1], нашло свое развитие в [3].

В работе [2] получены результаты, отличные от представленного выше для $g = 0$ на качественном уровне. Рассмотрена следующая задача. В идеальной неограниченной извне жидкости находятся два твердых тела (шары). В начальный момент времени жидкость и оба тела неподвижны. В последующие моменты времени первое тело, вибратор, совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль оси, произвольным образом ориентированной в пространстве. Требуется определить движение второго тела, включения. Найдено решение задачи для малых значений отношения радиуса первого тела к расстоянию между телами (радиус второго тела не мал и не велик по сравнению с радиусом первого тела). Установлено, что второе тело, включение ведет себя по-разному в зависимости от того, как соотносится его плотность с плотностью жидкости: включение, плотность которого больше, чем плотность жидкости ($\rho_v > \rho_{ж}$), движется к вибратору, к первому телу; включение, плотность ко-

торого меньше, чем плотность жидкости ($\rho_v < \rho_{ж}$), движется от вибратора. Второе тело, плотность которого совпадает с плотностью жидкости, в реализованном в [2] приближении (на фоне колебаний) пребывает в состоянии покоя.

Интересно отметить, что в [2] колеблющееся первое тело может рассматриваться как «источник гравитации»: второе тело, плотность которого больше, чем плотность жидкости, «тонет», второе тело, плотность которого меньше, чем плотность жидкости, «всплывает».

Анализ результатов, полученных в [1, 2], привел к началу содержательной классификации колебаний жидкости, к разделению колебаний жидкости на однородные и неоднородные [8]. Пусть включения в жидкости (движение которых изучается) отсутствуют; тогда колебания жидкости являются однородными, если все частицы жидкости движутся с одной и той же скоростью, колебания жидкости являются неоднородными, если не все частицы жидкости движутся с одной и той же скоростью. Колебания жидкости, в частности, в [1, 3] являются однородными, в [2] – неоднородными.

Важное место в исследованиях необычного, парадоксального поведения включений в колеблющейся жидкости принадлежит установлению и использованию принципа, состоящего в том, что в основе содержательных различий между движением включений в жидкости при наличии колебательных воздействий и в отсутствие колебательных воздействий на гидромеханическую систему находится возможность совершения включениями движения в различных направлениях в неодинаковых условиях (см., в частности, [10]).

В работе [4] поставлена и решена задача о движении газового включения, пузыря в колеблющейся вязкой жидкости как задача о течении жидкости со свободной границей. Обнаружен эффект преимущественно однонаправленного движения газового пузыря в колеблющейся (вибрирующей) жидкости. Сущность данного эффекта состоит в том, что газовый пузырь в жидкости, заполняющей (вместе с пузырем) замкнутый сосуд, вследствие заданных колебаний и деформаций сосуда перемещается в заданном направлении. В [6] представлены экспериментальные данные, подтверждающие наличие этого эффекта. Работа [7] посвящена экспериментальному обнаружению эффекта преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости (аналогичного эффекту преимущественно однонаправленного движения газового пузыря). В [11] проведено математическое

моделирование данного эффекта, поставлена и решена задача о движении пульсирующего твердого тела (шара) в колеблющейся вязкой жидкости (достигнуто соответствие между теорией и экспериментом). Таким образом, исследования, отраженные в [4, 6, 7, 11], привели к установлению существования явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся (вибрирующей) жидкости. Представленными результатами, в частности, были обусловлены изобретения – способ очистки жидкости от частиц (Патент РФ № 2023772) и устройства для очистки жидкости от частиц (Патент РФ № 2103045).

Как известно [5], многие тела (организмы, устройства) могут совершать самодвижение в жидкости, т. е., находясь в жидкости, перемещаться, отталкиваясь от нее. В работе [5] получены уравнения и сформулирована концепция самодвижения твердого тела в жидкости. Поставлена и изучена задача о движении в покоящейся на бесконечности вязкой жидкости самодвижущегося тела с периодически по времени работающим двигателем. В частности, определено асимптотическое поведение скорости жидкости на больших расстояниях от самодвижущегося тела. (В связи с проблемой самодвижения см. также [21–24]).

Интересно отметить, что решенная в [5] задача может служить математической моделью самодвижения в жидкости микроорганизма *Paramecium* (класс ресничных инфузорий) [25, 26].

Одним из актуальных направлений в гидромеханике является изучение термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области, жидком мостике. Данное направление имеет непосредственное отношение к проблеме создания высококачественных материалов. Задачи, касающиеся этого направления, весьма сложны ввиду того, что жидкость (расплав), образуя собой жидкий мостик, соприкасается с двумя твердыми телами и с газом; граница плавающей области частично является твердой, а частично – свободной. В работе [9] предложен подход, позволяющий осуществлять эффективное аналитическое изучение термокапиллярной конвекции в плавающей области. Данный подход может использоваться при математическом моделировании как стационарных, так и нестационарных пространственных течений жидкости в плавающей области как в отсутствие, так и при наличии массовых сил. (В связи с проблемой создания высококачественных материалов см. также [27–30]).

Среди наиболее интригующих, опасных и еще не вполне изученных явлений

Природы достойное место занимает смерч, торнадо. Важнейшая особенность этого явления – громадная скорость ветра, скорость вращения стенок воронки смерча, достигающая 50–300 м/с и больше; внутренность воронки наполнена относительно слабо движущимся разреженным воздухом, давление в ней понижено на величину порядка 85 мбар [31–33]. В работе [12] построена математическая модель смерча, естественным образом соединяющая основные характерные черты этого явления, приводящая к результатам, количественно согласующимся с данными наблюдений. В частности, моделью демонстрируется непосредственная связь смерча со смерчевым облаком; теоретически найденные значения скорости ветра и понижения давления воздуха в смерче составляют соответственно 150 м/с и 110 мбар. (В связи с проблемой торнадо см. также [34–40].)

Классификация колебаний жидкости, произведенная в [8], получила свое развитие в [13]. В этой работе введены количественные характеристики неоднородности колебаний жидкости: определены коэффициент неоднородности колебаний жидкости в точке и средний коэффициент неоднородности колебаний жидкости по области. Установлено, в частности, что движение включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости может быть различным на качественном уровне, сколь бы слабой ни была неоднородность колебаний жидкости.

В работах [14, 15] рассмотрены задачи о колебаниях в идеальной жидкости неоднородного твердого тела в присутствии силы тяжести, при наличии или в отсутствие вибрационных воздействий на гидромеханическую систему. Обнаружены эффекты положения равновесия и циклической частоты колебаний твердого тела в жидкости. Найдено, что тело в жидкости может находиться в состоянии движения, аналогичном маятнику Капицы [41, 42], т. е. совершать движение «в перевернутом виде», совершать парадоксальные, «перевернутые» колебания. Установлено, что в присутствии вибрационных воздействий тело в жидкости может выходить из состояния безразличного равновесия, приобретать положения устойчивого равновесия, совершать колебания, период которых отличен от периода воздействий на гидромеханическую систему.

Задачи, касающиеся динамики вязкой жидкости, как правило, характеризуются повышенным уровнем сложности [43–46]. К существенным дополнительным затруднениям в их изучении приводит наличие парадокса Стокса. Данный парадокс состоит в том, что плоская задача о течении не ограниченной

извне покоящейся на бесконечности вязкой жидкости вокруг цилиндрического твердого тела, движущегося в ней с постоянной скоростью под действием внешних сил, при малых значениях числа Рейнольдса (при малой скорости тела, при малом характерном размере тела, при большой вязкости жидкости) не имеет решения [47–50]. В частности, в связи с этим в работе [16] рассмотрена следующая задача. В вязкой неограниченной извне жидкости находится сжимаемое твердое тело (круговой цилиндр). Радиус тела и скорость жидкости на бесконечности периодически с периодом T изменяются со временем; среднее по времени значение скорости жидкости на бесконечности равно нулю. Тело подвергается внешнему стационарному силовому воздействию. Требуется определить движение тела и жидкости. Реализовано приближение малых значений параметров $\varepsilon = QT / A_0$ и $\kappa = \delta A / A_0$ (Q – наибольшее значение модуля скорости жидкости на бесконечности; δA – наибольшее значение $|A - A_0|$; A – радиус тела; A_0 – значение радиуса A в отсутствие его изменений со временем). Обнаружено, в частности, наличие разрешенных и запрещенных состояний гидромеханической системы (наличие разрешенных и запрещенных пульсаций тела, колебаний жидкости на бесконечности и внешнего силового воздействия), для которых нетривиальное решение задачи о среднем по времени движении тела соответственно существует и не существует (найден критерий существования решения данной задачи). Показано, что в разрешенных состояниях гидромеханической системы, в стационарной составляющей задачи о течении жидкости вокруг тела числом Рейнольдса является величина $Re = \varepsilon \kappa A_0^{2/3} (\nu T)$ (ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости). Таким образом, для $\varepsilon \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 0$ имеет место стационарное обтекание цилиндрического твердого тела плоским потоком вязкой жидкости при малых значениях числа Рейнольдса Re . При этом парадокс Стокса отсутствует.

Изучение движения гидромеханических систем, состоящих из вязкой жидкости и двух твердых стенок, в течение длительного времени сохраняет актуальность (см. [51–58]). Характерным для задач, касающихся данного объекта исследований, является то, что стенки испытывают внешние силовые воздействия, покоятся либо совершают заданное движение. В работе [17] поставлена и решена задача, в которой гидромеханическая система также подвер-

гается внешним силовым воздействиям, вследствие чего одна из стенок является закрепленной, покоится. Однако на другую – свободную – стенку действуют лишь внутренние силы; совместное затухающее движение свободной стенки и жидкости подлежит определению. Получена формула для характерного времени торможения свободной стенки. Определено условие, при выполнении которого происходит резкое торможение гидромеханической системы.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим следующую задачу. В идеальной несжимаемой неограниченной извне жидкости находится сжимаемое твердое тело, шар. Центр тела совпадает с точкой ξ , началом инерциальной прямоугольной системы координат x, y, z . Жидкость подвергается воздействиям со стороны тела, радиус a которого заданным образом изменяется со временем t , и воздействиям, проявляющимся в том, что жидкость на бесконечности движется с заданной, зависящей от времени скоростью $\mathbf{v}_\infty$:

$$\mathbf{a} = \hat{a} \left(1 + \lambda \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right), \quad \mathbf{v}_\infty = \hat{v} \left(\sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \mathbf{e}. \quad (1)$$

Здесь $\hat{a} > 0$, $\hat{v}$, $\tau > 0$, λ ($0 < |\lambda| < 1$) – параметры; $\mathbf{e} = \{0, 0, 1\}$. Оказываемые на жидкость воздействия вызывают ее движение в области ω : $r > a$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Данное движение требуется определить. Постановку задачи составляют уравнение неразрывности и условия на границе тела и на бесконечности:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi = \frac{da}{dt} \text{ при } r = a, \quad (3)$$

$$\nabla \varphi \rightarrow \mathbf{v}_\infty \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где φ – потенциал скорости жидкости; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к сфере $r = a$. Задача (2)–(4) имеет решение:

$$\varphi = -\frac{a^2 da/dt}{r} + v_\infty \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) z + c. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \mathbf{e}$; c – функция t .

Из (1), (5) следует, что (в области $r > (1 + |\lambda|) \hat{a}$) скорость жидкости $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad (6)$$

где

$$\bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathbf{v} dt' = -\frac{3}{16} \lambda (\lambda^2 + 4) \hat{a}^3 \hat{v} r^{-5} \{3xz, 3yz, 2z^2 - x^2 - y^2\}, \quad (7)$$

– средняя скорость жидкости; $\tilde{\mathbf{v}}$ – колебательная скорость жидкости ($\langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0$).

Согласно (1), (3), (4), жидкость подвергается периодическим по времени воздействиям, которые характеризуются, в частности, соотношениями $da/dt = 0$, $\langle \tilde{\mathbf{v}}_\infty \rangle = 0$. Область ω , при всех значениях t , симметрична относительно точки ξ и плоскости $z = 0$. Воздействия на жидкость, выражаемые формулой (3), симметричны относительно точки ξ , изменения со временем скорости $(da/dt)\mathbf{n}$ одинаковы для направлений, совпадающих с направлениями векторов $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$; воздействия на жидкость, выражаемые формулой (4), не зависят от знака z , изменения со временем скорости v_∞ одинаковы для направлений, совпадающих с направлениями векторов $\mathbf{e}$ и $-\mathbf{e}$. Ввиду изложенного, в отношении воздействий, испытываемых жидкостью, на оси z имеет место равноправие двух направлений, совпадающих с направлениями векторов $\mathbf{e}$ и $-\mathbf{e}$; отсутствует преимущественное, выделенное направление. Тем не менее, согласно (6), жидкость, колеблясь, совершает среднее по времени, стационарное движение, которое на оси z происходит лишь в одном направлении. Из (7) следует, что данным – единственным реализующимся – направлением является: совпадающее с направлением вектора $\mathbf{e}$, если $\lambda\hat{v} < 0$, совпадающее с направлением вектора $-\mathbf{e}$, если $\lambda\hat{v} > 0$. Таким образом, имеет место парадоксальное движение жидкости: испытываемая «неоднаправленные», равноправные, симметричные, периодические по времени воздействия, жидкость, на фоне колебаний, производит «однаправленную» реакцию – стационарное движение в одном, преимущественном, выделенном направлении.

Заключение

Представленные работы, полученные теоретические и экспериментальные результаты свидетельствуют о значимости и перспективности исследований в рассмотренной области, демонстрируют наличие содержательной связи этих исследований с широким спектром проблем фундаментального и прикладного характера.

Список литературы

1. Сenniцкий В.Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1985. – № 5. – С. 19–23.
2. Сenniцкий В.Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикладная механика и техническая физика. – 1986. – № 4. – С. 31–36.
3. Луговцов Б.А., Сenniцкий В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 289, № 2. – С. 314–317.
4. Сenniцкий В.Л. О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1988. – № 6. – С. 107–113.
5. Сenniцкий В.Л. О самодвижении тела в жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1990. – № 2. – С. 111–118.
6. Сenniцкий В.Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, № 1. – С. 117–119.
7. Сenniцкий В.Л. Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 1993. – № 1. – С. 100–101.
8. Sennitskii V. L. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // International workshop on G-jitter (USA, Potsdam, Clarkson university, 13-19 June 1993). – Proceedings. – Potsdam, 1993. – P. 178–186.
9. Сenniцкий В.Л. О термокапиллярной конвекции жидкости в плавающей области // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т. 39, № 3. – С. 69–73.
10. Сenniцкий В.Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 1. – С. 57–62.
11. Сenniцкий В.Л. О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 82–86.
12. Сenniцкий В.Л. Модель смерча // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. – 2001. – Т. 1, в. 1. – С. 103–106.
13. Сenniцкий В.Л. О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 1. – С. 79–85.
14. Сenniцкий В.Л. О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 27–35.
15. Сenniцкий В.Л. Об эффектах положения равновесия и циклической частоты колебаний твердого тела в жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 120–127.
16. Пятигорская О.С., Сenniцкий В.Л. Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 81–87.
17. Сenniцкий В.Л. Движение вязкой жидкости и стенки в присутствии покоящейся стенки // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 76–82.
18. Bleich H.H. Effect of vibrations on the motion of small gas bubbles in a liquid // Jet propulsion. – 1956. – Vol. 26, № 11. – P. 958–963.
19. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1. – С. 62–67.
20. Челомей В.Н. Избранные труды. – М.: Машиностроение, 1989. – 336 с.
21. Пухначев В.В. Асимптотика поля скоростей на больших расстояниях от самодвижущегося тела // Прикладная механика и техническая физика. – 1989. – № 2. – С. 52–60.
22. Smirnov S.A., Voropayev S.I. On the asymptotic theory of momentum/zero-momentum wakes // Physics Letters A. – 2003. – Vol. 307, № 2-3. – P. 148–153.
23. Afanasyev Y.D. Wakes behind towed and self-propelled bodies: Asymptotic theory // Physics of fluids. – 2004. – Vol. 16, № 8. – P. 3235–3238.
24. Новиков Б.Г. О влиянии малого суммарного импульса на развитие следа за самодвижущимся телами // Теплофизика и аэромеханика. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 597–623.

25. Вилли К. Биология. – М.: Мир, 1968. – 808 с.
26. Вилли К., Детье В. Биология. – М.: Мир, 1975. – 824 с.
27. Пфанн В. Зонная плавка. – М.: Мир, 1970. – 368 с.
28. Вигдорович В.Н. Совершенствование зонной перекристаллизации. – М.: Металлургия, 1974. – 200 с.
29. Петровский Г.Т., Воронков Г.Л. Оптическая технология в космосе. – Л.: Машиностроение, 1984. – 160 с.
30. Космическое материаловедение. Введение в научные основы космической технологии / под ред. Б. Фойербахера, Г. Хамахера, Р. Наумана. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
31. Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. – Л.: Наука, 1969. – 487 с.
32. Будилина Е.Н., Прох Л.З., Снитковский А.И. Смерчи и шквалы умеренных широт. – Л.: Гидрометеоздат, 1976. – 36 с.
33. Наливкин Д.В. Смерчи. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
34. Никулин В.В. Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами // Прикладная механика и техническая физика. – 1980. – № 1. – С. 68–75.
35. Макаренко В.Г., Тарасов В.Ф. Экспериментальная модель смерча // Прикладная механика и техническая физика. – 1987. – № 5. – С. 115–122.
36. Никулин В.В. Распад вертикального торнадоподобного вихря // Прикладная механика и техническая физика. – 1992. – № 4. – С. 42–47.
37. Хромов С.П., Петросянц М.А. Метеорология и климатология. – М.: Наука, 2006. – 582 с.
38. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. К вопросу управления поведением воздушных вихрей // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, в. 6. – С. 870–876.
39. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. – М.: Физматлит, 2011. – 345 с.
40. Вараксин А.Ю. Физическое моделирование воздушных смерчей // Безопасность в техносфере. – 2013. – № 5. – С. 3–10.
41. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. – 1951. – Т. 44, в. 1. – С. 7–20.
42. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
43. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955. – 520 с.
44. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: Физматгиз, 1963. – 584 с.
45. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.
46. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 733 с.
47. Chang I-Dee, Finn R. On the solution of a class of equations occurring in continuum mechanics with applications to the Stokes paradox // Archive for rational mechanics and analysis. – 1961. – V. 7, № 5. – P. 388–401.
48. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie. – М.: Иностранная литература, 1963. – 246 с.
49. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 311 с.
50. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 631 с.
51. Жмулин Е.М. Движение вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися и гармонически колеблющимися пластинами // Ученые записки ЦАГИ. – 1972. – Т. 3, № 2. – С. 51–59.
52. Wang C.-Y. The squeezing of a fluid between two plates // Transactions ASME. Journal of applied mechanics. – 1976. – V. 43, № 4. – P. 579–583.
53. Secomb T.W. Flow in a channel with pulsating walls // Journal of fluid mechanics. – 1978. – V. 88, pt. 2. – P. 273–288.
54. Мануйлович С.В. О восприимчивости плоского течения Пуазейля к вибрации стенок канала // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1992. – № 4. – С. 12–19.
55. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 48–51.
56. Аристов С.Н., Князев Д.В. Течения вязкой жидкости между подвижными параллельными плоскостями // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 4. – С. 55–61.
57. Петров А.Г. Точное решение уравнений Навье–Стокса в слое жидкости между движущимися параллельными пластинами // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53, № 5. – С. 13–18.
58. Петров А.Г. О точных и асимптотических решениях уравнений Навье–Стокса в слое жидкости между сближающимися и удаляющимися пластинами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2014. – № 2. – С. 44–57.