Глава 7. Связь основных математических структур. 7.1. Взаимосвязь математических структур по Бурбаки. 7.2. Меры на конечных множествах.

Дополнение. А. Основные теоремы математики. Б. Лагранжевы группы.

Заключение.

После каждой главы, пунктов дополнения и заключения приводится свой список литературы.

В учебном пособии рассматриваются начала современной теоретико-множественной математики, неотделимой от понятия математической структуры. В настоящее время *классической математикой* можно назвать математику, базирующуюся на *канторовской теории множеств* и обычной *двузначной логике*. Теория множеств полностью аксиоматизирована в первой трети XX века. Наиболее известной и употребительной является аксиоматика Цермело – Френкеля. Отметим, что аксиоматизация математики началась еще во второй половине XIX века, когда Карл Вейерштрасс, Георг Кантор, Рихард Дедекинд и другие построили и обосновали теорию действительных чисел, Джузеппе Пеано в 1891 году дал содержательную аксиоматику натурального ряда чисел, а Давид Гильберт в 1899 году аксиоматизировал евклидову геометрию. На этой содержательной основе зиждется подавляющая часть современной математики, центральным понятием которой служит понятие *математической структуры*, определяемой как множество с заданным на нем набором отношений. В середине XX века группа молодых французских математиков под псевдонимом Никола Бурбаки предприняла попытку систематизации математического знания, определив математику как дедуктивную науку о математических структурах. Н. Бурбаки завершили аксиоматизацию классической математики и выделили три типа фундаментальных математических структур – *алгебраический*, *порядковый* и *топологический*. К указанным типам структур можно добавить *пространства с мерой* и структуру *инцидентности*. Психолог Жан Пиаже связал основные типы математических структур с подобными, отвечающими им, умственными структурами и способностями человеческого интеллекта. Конечно, рассматриваемые типы математических структур никоим образом не исчерпывают всю математику, образуя лишь ее структурный каркас.

Алгебраические структуры отражают свойства алгебраических операций на множествах, обобщают понятия арифметической операции и вычисления. Их изучением занимается современная алгебра. В основе порядковых структур лежит понятие порядка, формализующее идею сравнения объектов (элементов множества) по величине. Отношение порядка исследуется в теории упорядоченных множеств и решеток. Топологический тип структур выражается в понятии топологического пространства, формализующего абстракции непрерывности и предельного перехода. Топологические структуры служат базой непрерывной математики: математического анализа, геометрии, топологии. Математические идеи измеримости и интегрируемости находят свое воплощение в теории меры и интегрирования, фундаментом которых является понятие пространства с мерой. Наконец, структуры инцидентности непременно присутствуют в различных геометриях и графах; они выражают факт принадлежности объектов одного рода объектам другого рода.

Математические объекты часто имеют *сложную структуру*, включающую в себя две или более *моноструктуры*, которые некоторым образом согласованы друг с другом. Например, естественное соединение алгебраических операций с отношением порядка дает упорядоченные алгебраические системы. Отношение порядка на множестве порождает различные топологии на этом множестве. Упорядоченные множества – это определенного рода ориентированные графы. Такие структуры инцидентности, как аффинные и проективные плоскости, допускают координатизацию элементами тернарных колец, тем самым становятся объектами геометрической алгебры, и т.п.

В учебном пособии каждому из пяти указанных выше типов математических структур посвящена отдельная глава. Большее внимание уделено алгебраическим и порядковым объектам. В первой главе «Множества и функции» излагаются начальные сведения о множествах и бинарных отношениях, вводится понятие категории. Теоретико-множественный и категорный языки равносильны, и оба могут служить основой классической математики. В последней, седьмой главе пособия рассматриваются взаимосвязи между различными типами математических структур, в основном, для конечных объектов. В дополнении приведены центральные результаты ряда разделов математики, которые можно назвать (и часто называют) основными теоремами математики. Философские аспекты математики затронуты во введении, в котором сделана еще одна попытка ответа на извечный вопрос «Что такое математика?».

Настоящее пособие с единой точки зрения подытоживает вузовский курс математики, имеет важное методологическое и воспита-