

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, ОСНОВАННЫМ НА ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Горшков А.В., Спевак Л.Ф.

Институт Машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: alex55gor@mail.ru

Работа посвящена моделированию трехмерных процессов деформирования неоднородных тел на основе вариационного принципа виртуальных скоростей и напряжений. Предполагается, что деформируемая область состоит из подобластей с различными механическими свойствами. Материал каждой подобласти предполагался изотропным. На границах подобластей заданы условия сопряжения. Расчет параметров деформирования на заданном конечном промежутке времени производится в лагранжевых координатах. Для произвольного, но фиксированного момента времени решается изохронная вариационная задача. В результате варьирования функционала получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно зависящих от времени параметров, которая решается численно при заданных начальных условиях. В качестве примера проведены расчеты процесса осадки слоистой заготовки. Использованное представление перемещений позволяет контролировать бочкообразование в процессе деформирования. Предложенные условия сопряжения поверхности позволили существенно понизить порядок системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова вариационный принцип, деформации, напряжения, математическое моделирование

SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL DEFORMATION PROBLEMS FOR HETEROGENEOUS AREAS USING THE VARIABLE SEPARATION METHOD BASED ON A VARIATIONAL FORMULATION

Gorshkov A.V., Spevak L.F.

Institute of Engineering Science RAS, Ural Branch, Ekaterinburg, e-mail: alex55gor@mail.ru

The paper deals with the three-dimensional deformation modeling for heterogeneous bodies. The modeling based on the variational principle of virtual velocities and stresses. It is proposed that the deforming domain consists of sub-domains with different mechanical properties, and that the material of each sub-domain is isotropic. Conjugation conditions at the boundaries between the sub-domains are specified. The calculation of deformation process parameters on the finite time interval is fulfilled using the Lagrangian coordinates. The isochronous variational problem is solved for an arbitrary time moment. As a result the system of ordinary differential equations is obtained for the determining of time-dependent parameters. The system is solved numerically for given initial conditions. As an example, the calculations of the layered perform setting. The displacement representation used allows to simulate the barreling in the process of deformation. The conjugation conditions proposed results in the decreasing the order of differential equation system.

Keywords: variational principle, deformation, stress, mathematical simulation

Математическое моделирование процессов деформирования материалов (ковки, прокатки, резания и др.) с целью их совершенствования сопровождается расчетом полей деформаций и напряжений в обрабатываемом изделии. Задача расчета деформирования однородных областей с помощью вариационного принципа скоростей и напряжений исследовалась В.Л. Колмогоровым и его учениками в работах [4, 5, 6]. В [1, 2] построены варианты вариационного принципа для неизотормических процессов и для случая несимметричного тензора напряжений. В работе [3] приведен пример расчета напряженного состояния цилиндра с каналом.

Рассмотрим задачу о деформировании кусочно-неоднородной заготовки, занимающей объем V и состоящей из K подобластей $V_{(m)}$. Решение задачи проведем в лагранжевых переменных, так как рассматриваются

большие деформации. В каждой подобласти введем локальную сопутствующую систему координат. Будем обозначать лагранжевы локальные переменные трехмерным вектором $\vec{Y}_{(m)}$ с компонентами $(Y_{(m)}^1, Y_{(m)}^2, Y_{(m)}^3)$. Текущие координаты точек подобласти относительно неподвижной системы отсчета будем обозначать $(x_{(m)}^1, x_{(m)}^2, x_{(m)}^3)$. Используем суммирование по умолчанию по повторяющимся индексам. Символ в скобках показывает номер подобласти. Суммирование по нему указывается явно. Поэтому номер подобласти располагаем где удобнее – сверху или внизу.

Будем считать, что материал подобластей однородный, изотропный, несжимаемый и выполняются гипотезы о подобии девиаторов напряжений и деформаций. Тогда свойства материала описываются функциями инвариантов:

$$s_{(m)}^{ij} = 2T_{(m)}(H_{(m)})e_{(m)}^{ij}/H_{(m)}, \quad e_{ij}^{(m)} = H_{(m)}(T_{(m)})s_{ij}^{(m)}/2T_{(m)},$$

$$e_{(m)} = e_{(m)}(\sigma_{(m)}), \quad \sigma_{(m)} = \sigma_{(m)}(e_{(m)}), \quad m = 1, 2, \dots, K. \quad (1)$$

Здесь $H_{(m)} = \sqrt{2e_{ij}^{(m)}e_{(m)}^{ij}}$ – интенсивность скоростей сдвига, $T_{(m)} = \sqrt{s_{ij}^{(m)}s_{(m)}^{ij}/2}$ – интенсивность касательных напряжений, $e_{ij}^{(m)}$ компоненты деватора тензора скоростей деформации, $s_{(m)}^{ij}$ – компоненты деватора тензора напряжений, $e_{(m)}$ – первый инвариант тензора скоростей деформаций, $\sigma_{(m)}$ – первый инвариант тензора напряжений, m – номер подобласти.

Предполагается, что поле скоростей $v_i^{(m)}$ и поле напряжений $\sigma_{(m)}^{ij}$ в пределах каждой подобласти непрерывны.

На внешней поверхности S области V заданы граничные условия:

на части поверхности S_v заданы скорости $v_i = v_i^*$;

на части поверхности S_f заданы внешние усилия $f^i = \sigma^{ij}n_j = f^{i*}$, где n_j – компоненты вектора нормали к поверхности S_f ;

на части поверхности S_s задана сила трения $f_\tau^* (f_v, v_s) \vec{i}$, $v_i = v_s$, v_s – скорость скольжения, \vec{i} – единичный вектор в направлении скорости скольжения.

Звездочкой отмечены заданные функции.

Для поверхностей S_v, S_f, S_s выполняются соотношения: $S_v \cup S_f \cup S_s = S$, и $S_v \cap S_f = \emptyset, S_v \cap S_s = \emptyset, S_f \cap S_s = \emptyset$.

В случае неоднородной области на поверхностях контакта подобластей рассматриваются два варианта. Первый: прилипание – скорости непрерывны, для усилий выполняются условия равновесия. Пусть соприкасаются подобласти с номерами p и q . Тогда выполняются соотношения

$$\vec{v}_n^{(p)} = \vec{v}_n^{(q)}, \quad \vec{v}_\tau^{(p)} = \vec{v}_\tau^{(q)},$$

$$\delta \{J_1 + J_2 + J_3 + J_4\} = 0, \quad (6)$$

где

$$J_1 = \sum_{n=1}^K \int_{V_{(n)}} \left[\int_0^{H_{(n)}} T_{(n)}(H_{(n)}) dH + \int_0^{T_{(n)}} H_{(n)}(T_{(n)}) dT + \int_0^{\sigma_{(n)}} \varepsilon_{(n)}(\sigma_{(n)}) d\sigma + \int_0^{\varepsilon_{(n)}} \sigma_{(n)}(\varepsilon_{(n)}) d\varepsilon + \rho_{(n)} a_{(n)}^i v_i^{(n)} \right] dV$$

$$\vec{f}_n^{(p)} = -\vec{f}_n^{(q)}, \quad \vec{f}_\tau^{(p)} = \vec{f}_\tau^{(q)}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}_n^{(p)}$ – компонента скорости по нормали к поверхности подобласти, $\vec{v}_\tau^{(p)}$ – касательная компонента скорости, $\vec{f}_n^{(p)}$ – компонента усилия на нормаль к поверхности подобласти, $\vec{f}_\tau^{(p)}$ – компонента усилия, касательная к поверхности подобласти $V_{(p)}$.

Второй – скольжение поверхностей. Поверхность скольжения подобластей P и q обозначим $S_s^{(pq)}$. В этом случае нормальные компоненты скоростей совпадают, так как тело сплошное, для нормальных компонент усилий выполняются условия равновесия:

$$\vec{v}_n^{(p)} = \vec{v}_n^{(q)}, \quad \vec{f}_n^{(p)} = -\vec{f}_n^{(q)}. \quad (3)$$

Разность касательных компонент скоростей равна скорости скольжения

$$\vec{v}_\tau^{(p)} - \vec{v}_\tau^{(q)} = \vec{v}_s^{(pq)}, \quad (4)$$

(номер в скобках совпадает с номером поверхности) разность касательных усилий определяется силой трения

$$\vec{f}_\tau^{(p)} - \vec{f}_\tau^{(q)} = f_\tau^{(pq)} \vec{i}, \quad (5)$$

где \vec{i} – единичный вектор, направленный параллельно скорости скольжения ($\vec{i} = \vec{v}_s / |\vec{v}_s|$).

Для решения задачи используется вариационный принцип скоростей и напряжений [1, 2, 3]. Решение рассматриваемой краевой задачи может быть получено путем решения вариационного уравнения, записанного для произвольного фиксированного момента времени t , выражающего принцип виртуальных скоростей и напряжений. В случае неоднородной области имеет вид

$$J_2 = - \int_{S_f} f^{i*} v_i' dS; J_3 = - \int_{S_v} f^{i'} v_i^* dS;$$

$$J_4 = - \sum_{p,q} \int_{S_S^{(pq)}} \left[\vec{f}_\tau^{r(pq)} \vec{v}_u^{(pq)} - \vec{f}_\tau^{(pq)} \vec{v}_s^{r(pq)} \right] dS.$$

Суммирование в J_4 ведется по парам скользящих поверхностей p и q .

Приближенное решение в произвольный момент времени t по предложенному методу следует искать с помощью принципа (6) в виде линейной комбинации функций координат

$$v_i^{r(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(m)} v_{ki}^{(m)}(y); \quad \sigma_{(m)}^{ij} = \sum_{k=1}^m b_{k(m)}^{ij} \sigma_{k(m)}^{ij}(y) \quad (7)$$

Здесь $v_{ki}^{(m)}(y)$, $\sigma_{k(m)}^{ij}(y)$ система линейно-независимых функций лагранжевых координат. Функции выбраны так, что $v_i^{r(m)}$ и $\sigma_{(m)}^{ij}$ являются виртуальными. Коэффициенты $a_{ik}^{(m)}(t)$, $b_{k(m)}^{ij}(t)$ – варьируемые при фиксированном t функции времени; (в правой части (6) по повторяющимся индексам i, j суммирование не производится).

После подстановки (7) в (6) и варьирования, уравнение (6) превратится в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $a_{ik}^{(m)}(t)$, $b_{k(m)}^{ij}(t)$, которую дополняем условиями непрерывности скоростей и равновесия (2) или (3, 4) и условиями трения (5).

Рассмотрим классическую задачу обработки металлов давлением – ковку параллелепипеда плоскими штампами, которая рассматривалась неоднократно в аналогичной постановке [1–4]. Схема задачи показана на рис. 1. Показаны также глобальные оси координат и локальные оси для третьей области.

Для простоты будем считать, что заготовка состоит из прямоугольных слоев размера $l_1 \times l_2$ постоянной толщины $h_{(m)}$ ($h_{(m)}$ не зависит от y_1, y_2 , но может меняться от слоя к слою). Предполагается, что в процессе обжатия все слои остаются прямоугольными, но могут деформироваться в усеченные пирамиды.

Пусть нижний штамп неподвижен, а верхний перемещается поступательно вниз со скоростью $v_u = v_u(t)$. Предполагается, что на контакте с инструментом превалирует зона скольжения S_s ; зона прилипания S_p , примыкающая к центру нижнего и верхнего оснований, практически отсутствует ($S_p = 0$). Предположим, что материал параллелепипеда обладает известными реономными свойствами, на контактной поверхности со штампами действует некоторый известный закон трения. Боковая поверхность параллелепипеда – это поверхность типа S_p на которой $\vec{f}^* = 0$.

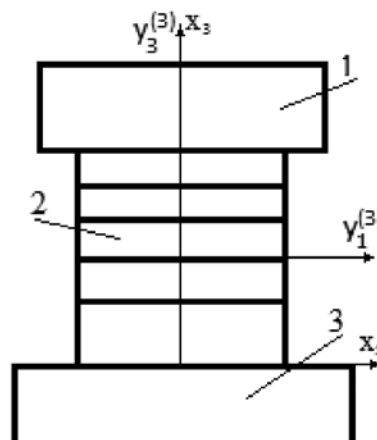


Рис. 1. Схема напряженно-деформированного состояния при осадке многослойного параллелепипеда: 1 – верхний штамп; 2 – заготовка; 3 – нижний штамп

Расчеты проводились для модели материала, для которой функции (1) имеют вид

$$T(H) = \tau_s + \mu H, \quad H(T) = \frac{T - \tau_s}{\mu}. \quad (8)$$

(бингамовский пластик).

Закон трения выбран по Зибелю [1,2]

$$f_\tau = k\tau_s. \quad (9)$$

Очевидно, что закон трения (9) не зависит от скорости скольжения и не имеет обратной функции. В выражениях (8) и (9) τ_s, μ, k известные величины: предел текучести при чистом сдвиге, коэффициенты «вязкости» и трения соответственно.

Будем предполагать, что физические координаты точек элемента имеют вид

$$\begin{aligned} x_{(m)}^1 &= y_{(m)}^1 + a_1^{(m)}(t)y_{(m)}^1 + b_1^{(m)}(t)y_{(m)}^3, \\ x_{(m)}^2 &= y_{(m)}^2 + a_2^{(m)}(t)y_{(m)}^2 + b_2^{(m)}(t)y_{(m)}^3, \\ x_{(m)}^3 &= y_{(m)}^3 + b_{31}^{(k)}(t)y_{(m)}^3 + b_{30}^{(m)}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Такое представление перемещений позволит учесть возникающую в процессе деформации бочкообразность изделия. Вектор перемещений $(u_{(m)}^1, u_{(m)}^2, u_{(m)}^3)$ связан с вектором $(y_{(m)}^1, y_{(m)}^2, y_{(m)}^3)$ соотношениями

$$\begin{aligned} u_{(m)}^1 &= a_1^{(m)}(t)y_{(m)}^1 + b_1^{(m)}(t)y_{(m)}^3, \\ u_{(m)}^2 &= a_2^{(m)}(t)y_{(m)}^2 + b_2^{(m)}(t)y_{(m)}^3, \\ u_{(m)}^3 &= b_{31}^{(m)}(t)y_{(m)}^3 + b_{30}^{(m)}(t). \end{aligned}$$

После подстановки (7, 8, 10) в (6) и варьирования получим систему относительно $\langle\langle\text{gorskiv69.wmf}\rangle\rangle$ переменных. Часть переменных связаны и их можно исключить из системы, понизив порядок.

Считаем, что перемешивания материала между слоями заготовки нет, и поэтому уравнение неразрывности выполняется для каждого слоя. В лагранжевых переменных уравнение неразрывности примет вид

$$\begin{aligned} (1 + a_1^{(m)})(1 + a_2^{(m)})(1 + b_{31}^{(m)}) &= 1, \\ m &= 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагается, что слои деформируются без проскальзывания. Боковая внешняя поверхность заготовки непрерывная (без уступов). Следовательно, на боковой грани должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} l_{(m)}^i + a_i^{(m)}(t)l_{(m)}^i + b_i^{(m)}h_{(m)} &= l_{(m+1)}^i + a_i^{(m+1)}(t)l_{(m+1)}^i, \\ i &= 1, 2, m = 1, 2, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем связь переменных $a_i^{(m)}$ и $b_i^{(m)}$

$$\begin{aligned} b_i^{(m)} &= \frac{1}{h_{(m)}}(a_i^{(m+1)}(t)l_{(m+1)}^i - a_i^{(m)}(t)l_{(m)}^i), \\ i &= 1, 2, m = 1, 2, \dots, K - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

При деформировании заготовки слои не отделяются друг от друга. Поэтому должно выполняться равенство, связывающее переменные $b_{30}^{(m)}$ и $b_{31}^{(m)}$

$$b_{30}^m + b_{31}^{(m)}h^{(m)} = b_{30}^{(m+1)}, \quad m = 1, 2, \dots, K - 1,$$

и
$$b_{31}^{(m)} = (b_{30}^{(m+1)} - b_{30}^{(m)})/h^{(m)} \quad (13)$$

Используя соотношения (12, 13) исключим из системы уравнений переменные

$$\begin{aligned} b_i^{(m)}, \quad i &= 1, 2, \quad m = 1, 2, \dots, K - 1 \\ \text{и } b_{31}^{(m)}, \quad m &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Чтобы исключить переменные $b_i^{(K)}$ введем дополнительные переменные $a_1^{(K+1)}, a_2^{(K+1)}$. Используя условие неразрывности (11) исключим из системы переменные $a_2^{(m)}, m = 1, 2, \dots, K$. Переменная $a_2^{(K+1)}$ сохраняется. В итоге вектор переменных будет содержать следующие неизвестные функции

$$x = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(K+1)}, b_{30}^{(2)}, \dots, b_{30}^{(K+1)}, a_2^{(K+1)}\},$$

всего $2K + 2$ неизвестных. В итоге получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенную относительно старших производных, которую коротко можно записать в виде

$$A(x)\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Здесь $A(x)$ – матрица коэффициентов при вторых производных, блочная. Блоки трех-диагональные.

В случае однородной среды типа (8) можно ввести относительное время по формуле

$$\tau = t \sqrt{\frac{\tau_s}{l^2 \rho}}.$$

Очевидно, что при такой замене в модели будет только один существенный параметр – относительный коэффициент вязкости μ . В случае неоднородной среды относительное время выберем из соотношения

$$\tau = t \sqrt{\frac{\tau_s^{\max}}{l^2 \rho_{\min}}},$$

где τ_s^{\max} – максимальное значение τ_s , а ρ_{\min} – минимальное значение ρ .

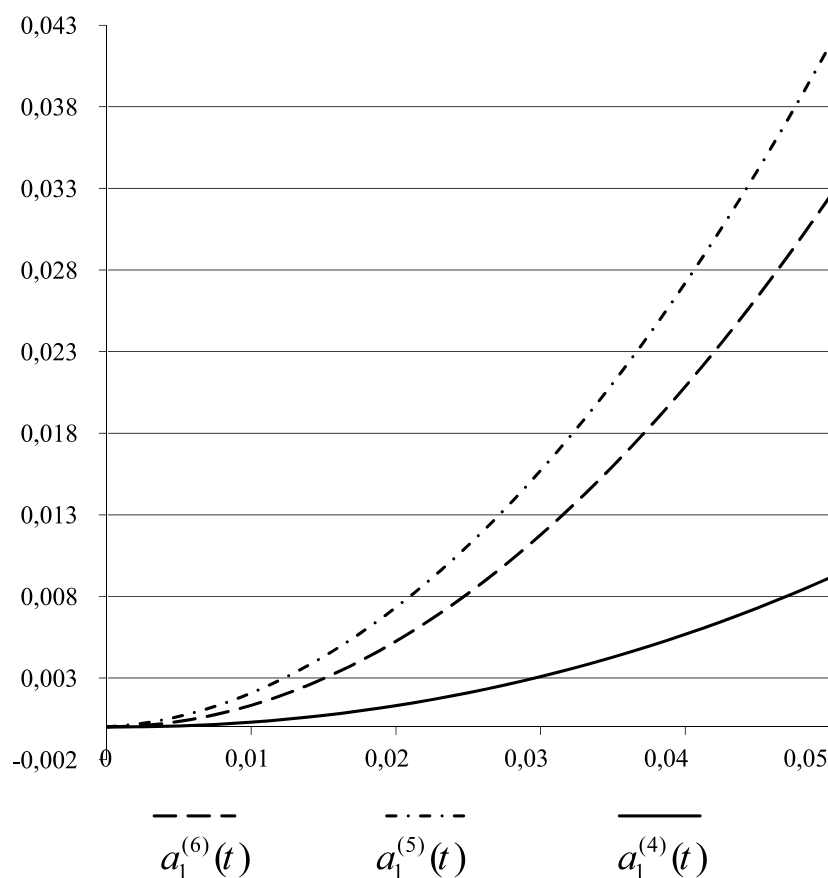


Рис. 2. Изменение параметров

Описанный алгоритм был опробован на модельном примере. Расчеты проводились при следующих начальных условиях:

$b_{30}^{(1)}(t) \equiv 0$ (нижнее основание неподвижно) $a_1^{(m)}(0) = 0, m = 1, 2, \dots, K + 1;$

$$b_{30}^{(m)}(0) = 0, m = 2, \dots, K;$$

$$b_{30}^{(K+1)}(0) = v_0,$$

где v_0 – заданная скорость бойка в момент касания.

Относительные значения параметров

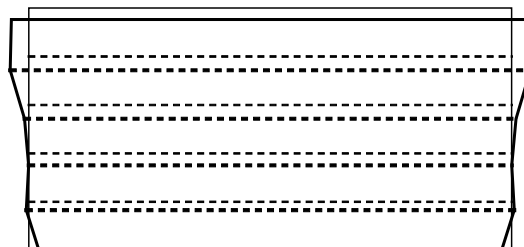
$$\tau_s^{(1)} = \tau_s^{(2)} = \tau_s^{(5)} = 1, \tau_s^{(3)} = \tau_s^{(4)} = 0.5, \rho = 1.$$

Результаты решения представлены на рис. 2. Используется относительное время.

Такое соотношение параметров можно объяснить следующим образом: $a_1^{(6)}(t)$ меняется меньше, чем $a_1^{(5)}(t)$, так как влияет

сила трения на поверхности контакта с инструментом; изменение $a_1^{(4)}(t)$ существенно меньше, так как сказываются силы инерции.

На рис. 3 тонкой линией показана исходная форма заготовки, жирной – форма после деформации. Пунктиром показано разделение заготовки на слои.

Рис. 3. Изменение формы заготовки к моменту времени $t=0,05$ по сравнению с начальной формой

Рассмотренный вариант вариационно-го принципа скоростей и напряжений дает возможность учитывать неоднородность материала заготовки. Используемая форма представления перемещений позволяет учесть бочкообразность заготовки в процессе деформирования, что и продемонстрировано на примере расчета. Более точные расчеты могут быть выполнены с использованием более высокого порядка аппроксимации.

Список литературы

1. Горшков А.В., Привалова В.В. О вариационном принципе скоростей и напряжений при несимметричном тензоре напряжений // Механика деформирования и разрушения. – 2001. – С. 20-30.
2. Горшков А.В. О вариационном принципе скоростей и напряжений для неизотермических процессов // Известия Уральского университета. – 2003. №26 (математика и механика), – вып. 5. – С. 40-44.
3. Горшков А.В. О напряженно-деформированном состоянии цилиндра из упруго-пластического материала под действием давления в канале // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. – Сер. Физ.-мат. Науки. – 2006. – Т. 42. – С. 86-91.
4. Колмогоров В.Л., Спевак Л.Ф., Чурбаев Р.В. Определение ресурса пластичности металла при высокоскоростном деформировании в условиях высокого давления // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – №4. – С. 2-8.
6. Kolmogorov V.L., Spevak L.F., Gorshkov A.V. A method for calculating the stress-strain state in the general boundary value problem of metal forming – part 2 // Impact of a bar against a rigid obstacle. International Journal of Solids and Structures. – 1999. №36. – P. 1263-1275.
7. Kolmogorov V.L., Spevak L.F., Gorshkov A.V. Three-dimensional analysis of the stress-strain state in the process of plastic deformation of metals // Journal of Materials Processing Technology. – 1999. №5. – P. 55-64.
8. Kolmogorov V.L., Spevak L.F., Churbayev R.V. On the technique used to determine plasticity margin in high-speed deformation under high pressure // International Journal of Mechanical Sciences. – 2008. – Vol. 50/4. – P. 676-682.