

УДК 539.31:517.928.7

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТУРЕ ОТВЕРСТИЙ

Щукина Н.А.

*ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет экономики, статистики
и информатики (МЭСИ)», Москва, e-mail: shchukinan@ya.ru*

Статья посвящена применению метода эффектов второго порядка для решения плоских задач нелинейной теории упругости. Данный метод использует разложение в степенные ряды по малому параметру объектов, описывающих напряженно-деформированное состояние. В рамках построенной приближенной математической модели найдено аналитическое решение задачи о концентрации напряжений на контуре квадратного отверстия, свободного от нагрузок, при равномерном растяжении на бесконечности. Данный алгоритм реализован в пакете символьной математики Maple. Показано, что величина коэффициента концентрации напряжений зависит от внешней нагрузки. При этом при определенных значениях малого параметра в области концентраторов напряжений наблюдается раздвоение максимума на два симметричных.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, эффекты второго порядка, приближенная математическая модель, коэффициент концентрации напряжений, система автоматизированного вычисления

APPLICATION MATHEMATICAL PACKAGES TO STUDY OF STRESS CONCENTRATION ON THE CONTOUR HOLES

Shchukina N.A.

Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, Moscow, e-mail: shchukinan@ya.ru

This article is devoted to the application of the second order method for the solution of plane problems of the nonlinear theory of elasticity. This method uses the decomposition in power series objects describing the stress-strain state. Within the constructed approximate mathematical model the analytical solution of the problem of stress concentration on relaxed square hole contour in case of uniform stretching. This algorithm is implemented in package Maple. The influence of external loads on the stress concentration factor. For some values of small parameter in the field of stress concentrators has a split peak at two symmetrical.

Keywords: nonlinear elasticity theory, the second order effects, an approximate mathematical model, the stress concentration factor, system of automatic calculations

В настоящее время поиск аналитических решений задач нелинейной теории упругости является достаточно сложной задачей. Одной из сложностей при построении математических моделей таких задач является учет несжимаемости материала. Условие несжимаемости несет дополнительную информацию о геометрии деформирования. В работе [1] предложена приближенная математическая модель нелинейной теории упругости для плоской деформации однородного изотропного материала, в рамках которой условие несжимаемости выполняется автоматически. В качестве метода построения приближенной модели плоской деформации используется метод возмущений, использующий разложения по степеням малого параметра объекты, описывающие напряженно-деформированное состояние.

Однако из-за громоздких вычислений разложение выше второго порядка практически не используется. Появление современных пакетов символьной математики позволяет написать программы, облегчающие манипулирование с громоздкими выражениями, описывающими эффекты второго порядка при произвольном напряженно-деформированном состоянии. Эти эффекты выделяются при ограничении разложений для радиус-вектора частиц в текущей конфигурации \mathbf{R} и функции гидростатического давления p членами до второго порядка по малому параметру η .

Математическая постановка задачи

В рамках рассматриваемой модели можно ограничиться выражением для потенциала энергии деформации в форме, предложенной в [2]:

$$w = \frac{1}{6} \left\{ (3\mu + \mu_1) [I_1(\mathbf{G}) - 3] - \mu_1 [I_2(\mathbf{G}) - 3] + \frac{\mu_2 + \mu_1 - \mu}{8} [I_2(\mathbf{G}) - 3]^2 \right\},$$

где m , μ_1 и μ_2 – константы, причем μ – модуль сдвига линейной теории, $I_k(\mathbf{G})$ – главные инварианты меры деформации Коши \mathbf{G} .

Следуя работе [3], разложение радиус-вектора точек в плоскости, ортогональной оси OZ , в текущей конфигурации представляется в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \overset{0}{\nabla} f \boldsymbol{\eta} + \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} h \right) \frac{\boldsymbol{\eta}^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точек в отсчетной конфигурации, $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Гамильтона в базисе исходной конфигурации, $\overset{s}{\nabla} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x}$ – симплектический оператор. Дифференциальные операторы действуют только на первый множитель справа, не являющийся оператором. Точка означает скалярное произведение.

Используя разложение (1), получим представления в рамках эффектов второго порядка тензора напряжений Коши

$$\mathbf{S} = \sigma \boldsymbol{\eta} + \mathbf{S}_2 \boldsymbol{\eta}^2, \quad (2)$$

где $\sigma = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_1 \mathbf{E})$, $\mathbf{S}_2 = 2\mu \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) \mathbf{E} + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \right)$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \right), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} h + \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} h \right), \quad \alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1 - \mu}{12\mu},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \overset{0}{\nabla} \left(\overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \right) = \frac{1}{4} \left(\overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f + \overset{s}{\nabla} f \cdot \overset{0}{\nabla} \overset{0}{\nabla} \overset{s}{\nabla} f \right),$$

$p = \mu \left(-\frac{1}{2} + p_1 \boldsymbol{\eta} + p_2 \boldsymbol{\eta}^2 \right)$ – функция, связанная с гидростатическим давлением, знак «Т» – транспонирование.

Уравнения равновесия приводятся к системам дифференциальных уравнений для эффектов первого и второго порядков соответственно:

$$\begin{aligned} 2 \overset{0}{\nabla} p_1 + \overset{s}{\nabla} \Delta f &= 0, \\ \overset{0}{\nabla} (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) + \frac{1}{4} \overset{s}{\nabla} \Delta h + \frac{1}{2} \overset{s}{\nabla} \Delta f \cdot \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f + \overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Условие интегрируемости системы уравнений (3) для эффектов первого, второго и третьего порядков соответственно приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\Delta \Delta f = 0, \quad \Delta \Delta h = 0.$$

Обозначим $\mathbf{f} = \mathbf{f}' \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}'' \boldsymbol{\eta}^2$ – разложение вектора плотности внешних сил, приложенного к деформированной боковой поверхности и рассчитанного на единицу площади этой поверхности. Тогда силовые граничные условия в напряжениях запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 + p_1 \mathbf{E}) &= \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (p_2 - I_1(\mathbf{B}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1) \mathbf{E} \right) &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^T - p_1 \overset{s}{\nabla} \overset{0}{\nabla} f \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}''}{2\mu} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{n} \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$.

Если плотность внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}' \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}'' \boldsymbol{\eta}^2$ задана в отсчетной конфигурации, а нагружение «мертвое», то $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{f}'}{2\mu}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{f}''}{2\mu}$.

Выражения (1) – (5) представляют постановку граничной задачи нелинейной теории упругости. Так как уравнения (4) для эффектов первого и второго порядков приводят к бигармоническим уравнениям относительно искомых функций $f(x, y)$ и $h(x, y)$, то поиск аналитического решения краевых задач для эффектов первого и второго порядка можно проводить единым образом в автоматическом режиме.

С помощью стандартной процедуры [4] граничные задачи линейной теории упругости для эффектов первого и второго порядков сводятся к интегральным уравнениям теории функций комплексной переменной. Рассматриваются только области, которые можно конформно отобразить на внешность окружности единичного радиуса с центром в начале координат с помощью функции вида

$$z = v(\xi) = \xi + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\xi^k},$$

где $a_k = \text{const}$.

Для этих областей интегральные уравнения теории функций комплексной переменной приводятся к алгебраическим уравнениям с помощью интегралов типа Коши.

Перейдем к комплексным переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и введем комплексные потенциалы по формуле Гурса:

$$f(z, \bar{z}) = z\theta(\bar{z}) + \bar{z}\theta(z) + \chi(z) + \chi(\bar{z}),$$

$$h(z, \bar{z}) = z\zeta(\bar{z}) + \bar{z}\zeta(z) + \psi(z) + \psi(\bar{z}).$$

Для данных потенциалов уравнения (4) выполняются тождественно, а решением системы уравнений равновесия (3) являются функции:

$$p_1(z, \bar{z}) = 2i(\theta'(\bar{z}) - \theta'(z)),$$

$$p_2(z, \bar{z}) = -2a\bar{a}(4\alpha + 1) - 2b\theta''(z) - 2\bar{b}\theta''(\bar{z}) + i(\zeta'(\bar{z}) - \zeta'(z)),$$

где

$$a = z\theta''(\bar{z}) + \chi''(\bar{z}), \quad \bar{a} = \bar{z}\theta''(z) + \chi''(z), \quad b = z\theta'(\bar{z}) + \theta(z) + \chi'(\bar{z}),$$

$$\bar{b} = \bar{z}\theta'(z) + \theta(\bar{z}) + \chi'(z).$$

Искомые потенциалы аппроксимируются разложением в ряды Лорана, а коэффициенты находятся из условия удовлетворения

граничным условиям (5) на бесконечности и на контуре отверстия. На бесконечности с помощью предельного перехода получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений для части коэффициентов разложения. Получение уравнений для оставшихся коэффициентов требует вычисления интегралов типа Коши на контуре отверстия. Т.к. на свободном от нагрузки контуре нормальные напряжения равны нулю, то тангенциальные напряжения на контуре, потребные для вычисления коэффициента концентрации, вычисляются в виде инварианта тензора напряжений Коши

$$\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\tau\tau} + \sigma_{nn} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

$$\text{и } S_{\tau\tau} = S_{\tau\tau} + S_{nn} = S_{11} + S_{22}$$

для эффектов первого и второго порядков соответственно.

Для нахождения аналитического решения задач о концентрации напряжений около отверстий на базе пакета символьной математики Maple создан комплекс программ, позволяющий автоматизировать символьные вычисления. Все операции распространены на тензоры до второго порядка включительно, компоненты которых являются рядами по малому параметру. Алгоритм позволяет находить выражение коэффициента концентрации напряжений для различных

форм отверстия при различных видах деформации в рамках эффектов второго порядка.

**Задача о концентрации напряжений
около квадратного отверстия
при равномерном растяжении на
бесконечности**

Без потери общности будем считать радиус отверстия равным единице. Контур отверстия свободен от напряжений. На бесконечности приложена равномерная радиальная нагрузка интенсивности p , Н/м². Универсальным силовым параметром, имеющим ту же размерность, является модуль сдвига линейной теории упругости μ . Поэтому естественно возникает безразмерный малый параметр вида $\eta = \frac{p}{\mu}$.

В цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ введем единичный базис $\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Коэффициент концентрации напряжений в нелинейной теории, как и в классическом решении линейной теории, будем определять как

$$k = \left. \frac{S_{22}}{p} \right|_{r=1},$$

где S_{22} – тангенциальная компонента «плоской» части тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{S} = S_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + S_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$. Представление этой компоненты в рамках приближенной теории имеет вид $S_{22} = \sigma_{22}\eta + S''_{22}\eta^2$, откуда, вспоминая, что $p = \mu\eta$, получим выражение для коэффициента концентрации в рамках приближенной теории:

$$k = \left. \frac{S_{22}}{p} \right|_{r=1} = \left. \frac{\sigma_{22}\eta + S''_{22}\eta^2}{\mu\eta} \right|_{r=1} = \left. \frac{\sigma_{22}}{\mu} \right|_{r=1} + \left. \frac{S''_{22}\eta}{\mu} \right|_{r=1} = k_1 + k_2\eta.$$

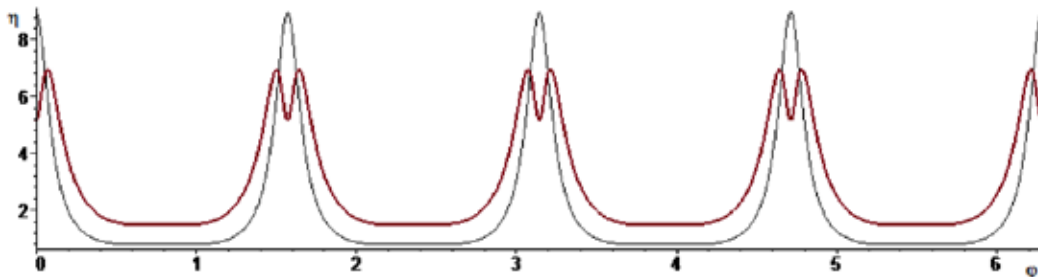


Рис. 1. Распределение относительных тангенциальных напряжений на контуре отверстия (развертка) при $\eta = 0.8$. Тонкая линия соответствует решению в рамках линейной теории, толстая линия соответствует квадратичному решению

Конформное отображение внешности квадрата на внешность круга $|\xi| \geq 1$ задается формулой $z = \xi + \frac{1}{6\xi^3} + \frac{1}{56\xi^5}$. Вершинам квадратного контура соответствуют значения полярного угла $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. На бесконечности приложена равномерная нагрузка интенсивности $p = \mu\eta$, где η – малый параметр. Тогда на бесконечности вектор внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\eta + \mathbf{f}''\eta^2$ на площадках с нормальным вектором \mathbf{i} имеет разложение $\mathbf{f}' = \mu\mathbf{i}$, $\mathbf{f}'' = 0$, а на площадке с нормальным вектором \mathbf{j} разложение – $\mathbf{f}' = \mu\mathbf{j}$, $\mathbf{f}'' = 0$.

Для квадратичного приближения разложение коэффициента концентрации напряжений по малому параметру $\eta = \frac{p}{\mu}$ в вер-

шинах квадратного отверстия принимает вид $k = \frac{1426}{159} - \frac{240455}{50562}\eta$. Таким образом,

наблюдаем уменьшение значения тангенциальных напряжений с увеличением величины интенсивности приложенной внешней нагрузки p . Графики распределения относительных тангенциальных напряжений на внутреннем контуре отверстия, свободном от нагрузок, вычисленных в рамках эффектов первого и второго порядков при различных значениях параметра η , изображены на рис. 1 и 2.

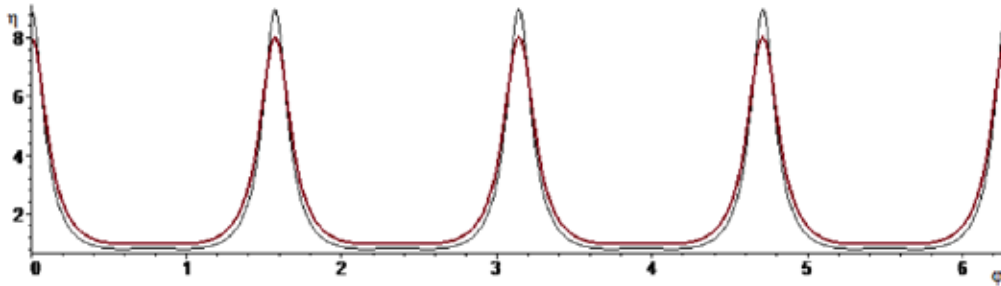


Рис. 2. Распределение относительных тангенциальных напряжений на контуре отверстия (развертка) при $\eta = 0.2$. Тонкая линия соответствует решению в рамках линейной теории, толстая линия соответствует квадратичному решению

Как видно из графиков, в квадратичном приближении при различных значениях параметра η максимум величины коэффициента концентрации напряжений k достигается при различных значениях j , при этом его величина, по сравнению с классическим решением линейной теории, уменьшается. Заметим, что при учете внешней нагрузки p в разложении коэффициента концентрации напряжений наблюдаем эффект раздвоения одного максимума в вершине угловой точки на два симметричных максимума в окрестности данной вершины. При этом в самой вершине достигается минимум.

Исследовав функцию $\frac{S_{22}}{p}$ на экстремум, получаем, что значениям

$$\eta = \frac{p}{\mu} < 0.364$$

соответствует один экстремум: максимум достигается в вершинах квадратного контура. При $\frac{p}{\mu} > 0.364$ каждому значению $\eta = \frac{p}{\mu}$ соответствует три точки экстремума: в вершинах квадрата достигается минимум, а двум другим корням производной $\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S_{22}}{p} \right)$ соответствуют максимумы.

Максимальные значения коэффициента концентрации напряжений k_{\max} , вычисленные с точностью 10^{-6} , и соответствующие им значения полярного угла φ_{\max} в зависимости от величины малого параметра h записаны в таблице.

Экстремальные значения коэффициента концентрации k_{\max} и соответствующие им значения полярного угла φ_{\max}

$\eta = \frac{p}{\mu}$	k_{\max}	φ_{\max}
0.1	8.4929885	0
0.2	8.0174237	0
0.3	7.5418589	0
0.364	7.2374980	0.0031250
0.4	7.0911554	0.0236328
0.5	6.8714057	0.0437500
0.6	6.8041820	0.0500000
0.7	6.8603106	0.0633789
0.8	6.9618454	0.0696289
0.9	7.1029659	0.0750000

Выводы

Построенная приближенная математическая модель позволяет находить аналитическое решение плоских задач нелинейной теории упругости о концентрации напряжений около отверстий на базе математического пакета Maple.

Алгоритм применен для решения задачи о концентрации напряжений около квадратного отверстия при равномерном растяжении на бесконечности. Показано, что учет нелинейности в области концентраторов напряжений не только снижает значение тангенциальных напряжений, но и позволяет говорить об эффекте раздвоения одного

максимума в вершине угловой точки на два симметричных максимума в окрестности данной вершины.

Список литературы

1. Жуков, Б.А. Эффекты третьего порядка в исследовании концентрации напряжений около отверстий / Б.А. Жуков, Н.А. Шукина // Известия ВолгГТУ. – 2010. – Т.1. – №3. – С. 113–118.
2. Жуков, Б.А. Модель эффектов третьего порядка в статических задачах расчетов резинотехнических изделий / Б.А. Жуков, Н.А. Шукина // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Серия Естественные науки. – 2010. – № 3. – С. 24–27.
3. Жуков Б.А. Один вариант метода Синьорини при плоской деформации несжимаемого материала / Б.А. Жуков // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 4. – С. 59–67.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 707 с.